



УДК: 537.86, 530.182

MSC 2010: 70Kxx, 39Axx

Два вида автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями

А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова

Исследуется модель активной среды с периодическими граничными условиями, элементарная ячейка которой представляет собой осциллятор Фицхью–Нагумо. В зависимости от значений параметров элемент среды может находиться либо в автоколебательном, либо в возбужденном режиме. И в том, и в другом случае во всех точках среды наблюдаются незатухающие колебания, однако причины их возникновения различны. В первом случае каждая ячейка сама является автогенератором, во втором — колебания возникают благодаря обратной связи, обеспечиваемой периодическими граничными условиями. В обоих случаях наблюдается явление мультистабильности. Проведен сравнительный анализ двух указанных видов автоколебательных режимов, реализуемых в активной среде. Показано, что зависимости характеристик автоколебаний от параметров системы в двух исследуемых случаях значительно отличаются друг от друга. Для некоторых мод установлен бифуркационный характер перехода от одного режима ячейки к другому, сопровождающийся скачкообразным изменением периода колебаний и фазовой скорости бегущих волн при вариации управляющего параметра. Рассмотрено влияние пространственно некоррелированного шума на поведение активной среды. Построена зависимость среднего периода колебаний от интенсивности шума для двух режимов динамики элементарной ячейки.

Ключевые слова: активная среда, система Фицхью–Нагумо, пространственные структуры, мультистабильность, шумовое воздействие

Получено 11 июля 2012 года

После доработки 12 сентября 2012 года

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 годы)» (контракты № 14.740.11.0074 и № 14.В37.21.0751).

Слепнев Андрей Вячеславович

a.v.slepnev@gmail.com

Вадивасова Татьяна Евгеньевна

tanya@chaos.ssu.runnet.ru

Международный НИИ нелинейной динамики

Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Введение

Определение автоколебательной системы, данное А. А. Андроновым [1], применимо не только к конечномерным системам (системам с сосредоточенными параметрами), но также и к распределенным системам. В электронике СВЧ и квантовой оптике автогенераторы, представляющие собой распределенные автоколебательные системы, широко распространены. Однако в теории распределенных систем было введено более широкое понятие — активная среда. В активных средах могут существовать автоволны — незатухающие волновые процессы, поддерживающиеся за счет энергии постоянных источников. Автоволновой процесс отличается от автоколебательного тем, что автоволна может смещаться в неограниченном пространстве и колебания в каждой точке среды в общем случае не обязаны быть незатухающими. В случае же любого распределенного автогенератора колебательный процесс постоянно повторяется в точках среды в ограниченной области пространства.

Активные среды принято делить на автоколебательные, возбудимые и бистабильные [2]. В автоколебательной среде каждый элемент представляет собой сосредоточенный автогенератор, и, следовательно, в каждой точке среды могут наблюдаться незатухающие автоколебания. Элементы возбудимой и бистабильной сред не являются автоколебательными, но при определенных граничных условиях в таких средах также могут наблюдаться локализованные в пространстве колебания, то есть возбудимые и бистабильные среды могут быть распределенными автогенераторами, что определяется наличием в таких средах постоянных источников энергии. Простейший способ превратить возбудимую среду в автоколебательную систему — «свернуть» ее в кольцо (то есть обеспечить периодические граничные условия) [3–5]. В этом случае автоволна циркулирует в локализованном участке среды, воздействуя на одни и те же элементы среды. Более сложный пример возникновения автоколебаний в возбудимой среде — хорошо известные спиральные волны [2, 6, 7].

В настоящей работе рассматривается среда, смоделированная на основе осцилляторов Фицхью–Нагумо, с периодическими граничными условиями. Осциллятор Фицхью–Нагумо представляет собой упрощенную модель нейрона [8]. В последние годы исследования осцилляторных ансамблей и сред, в основе которых лежит модель Фицхью–Нагумо, вызывают большой интерес в связи с задачами моделирования процессов в нейронных волокнах [9–11]. Элемент исследуемой среды, в зависимости от параметров, может быть как автогенератором, так и возбудимым осциллятором. Из публикаций известно, что в активных средах с периодическими граничными условиями и в случае автоколебательного характера элемента, и в случае возбудимого наблюдаются бегущие волны и для таких сред характерна мультистабильность [4, 5, 12]. По внешнему виду режимы бегущих волн в обоих случаях мало различаются, но мы рассматриваем их как два различных вида автоколебаний. Таким образом, можно сформулировать следующие цели работы: 1) сравнить автоколебания в среде при различных характерах элемента и выявить отличия характеристик бегущих волн в этих двух случаях; 2) исследовать бифуркационный переход от одного вида автоколебаний к другому; 3) выяснить, как влияет шум в том и другом случае.

1. Модель автоколебательной среды

Рассмотрим модель активной среды, представляющую собой одномерное кольцо, с элементарной ячейкой в виде осциллятора Фицхью–Нагумо:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta + \sqrt{2D}\xi, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ — безразмерные вещественные динамические переменные, s — безразмерная пространственная координата, t — безразмерное время, $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ — управляющие параметры системы, d — коэффициент диффузии, $\xi = \xi(s, t)$ — источник пространственно некоррелированного нормированного гауссова белого шума, D — интенсивность шума. Граничные условия:

$$\begin{aligned} x(0, t) &= x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \\ \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \right|_{s=0} &= \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \right|_{s=L}, \quad \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \right|_{s=L}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где L — пространственный период. Система (1.1) исследовалась при фиксированных параметрах $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3$, $\epsilon = 0.1$, $L = 100$, параметр β менялся в диапазоне $[0; 5]$, коэффициент диффузии — в диапазоне $[0.02; 0.2]$. При значениях $\beta \in [0; 3)$ элементарная ячейка среды находится в автоколебательном режиме, при $\beta \in (3; 5]$ — в возбуждимом. Смена режима происходит через суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа при $\beta_{cr} \approx 3$.

При значениях параметров, указанных выше, в системе (1.1) при отсутствии шума наблюдается мультистабильность. В ней сосуществуют режимы бегущих волн, отличающиеся друг от друга длиной волны и направлением распространения. Кроме того, в автоколебательном режиме существует пространственно однородная автоколебательная мода, отсутствующая в возбуждимом режиме. В данном случае однородность означает, что все точки среды совершают идентичные колебания в одной фазе.

Введем номер моды n следующим образом: пусть абсолютное значение n равно числу волн, укладывающихся на длине системы ($|n| = \frac{L}{\lambda}$, где λ — длина волны), а знак n показывает направление распространения (для волн, распространяющихся слева направо, $n > 0$, в обратном направлении — $n < 0$). В численных экспериментах, кроме пространственно однородных колебаний ($n = 0$), были обнаружены следующие волновые моды: $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. На рисунках 1–2 представлены пространственные профили и пространственно-временные диаграммы некоторых сосуществующих мод.

Следует отметить, что волновые моды, характеризующиеся одним и тем же по модулю номером n , но с противоположными знаками, ведут себя совершенно одинаково. По этой причине мы будем рассматривать только моды $n \geq 0$.

2. Сравнение характеристик колебаний среды в автоколебательном и возбуждимом режимах элементарной ячейки

Проследим за изменением таких характеристик автоколебаний, как период и фазовая скорость, в незашумленной системе ($D = 0$) при вариации управляющих параметров β и d для различных мод, сосуществующих в рассматриваемой активной среде, и в различных режимах элементарной ячейки. Рассмотрим сначала зависимости периода T и фазовой скорости $v_\phi = \frac{L}{nT}$ колебаний от параметра β для волновых мод $n = 1, 2, 3$ при фиксированном значении коэффициента диффузии $d = 0.1$ (рис. 3). На рисунках можно выделить две области с различным поведением системы, соответствующие автоколебательному ($\beta \in [0; 3)$) и возбуждимому ($\beta \in (3; 5]$) режимам элементарной ячейки. Они разделены бифуркационным

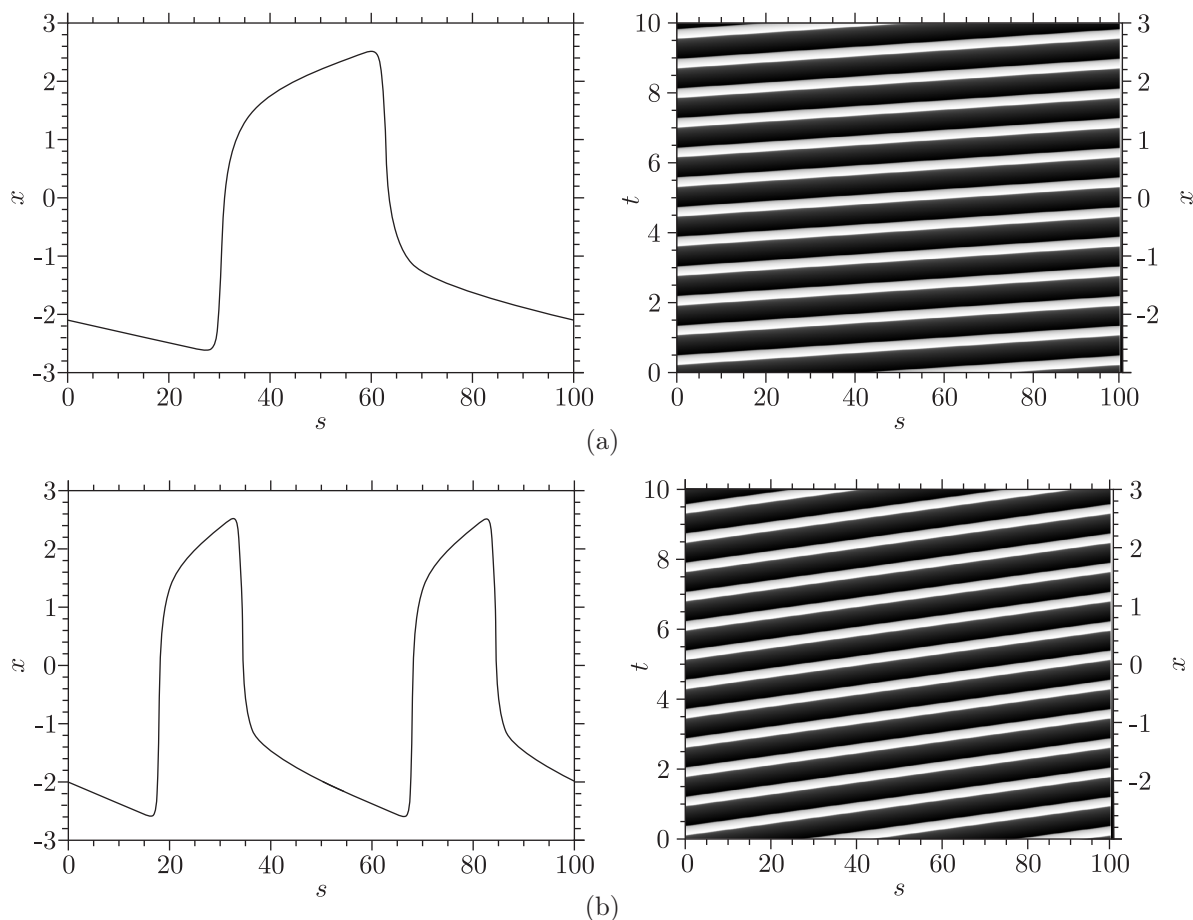


Рис. 1. Пространственные профили (слева) и пространственно-временные диаграммы (справа) мод $n = 1$ (a) и $n = 2$ (b) в автоколебательном режиме ячейки при $\beta = 2$.

значением параметра $\beta_{cr} \approx 3$. Как видно из рисунка 3а, период колебаний в автоколебательном режиме ячейки одинаков для всех сосуществующих мод и определяется, по-видимому, периодом колебаний самой ячейки. При этом значение периода практически не меняется с ростом параметра β . В возбудимом режиме ситуация иная: здесь период колебаний неодинаков для различных колебательных мод, а если проследить за изменением периода колебаний одной из мод, то виден значительный его рост с увеличением β .

Поведение фазовой скорости (рис. 3б) оказывается противоположным поведению периода. Так, фазовая скорость различных мод неодинакова в автоколебательном режиме элементарной ячейки, а в возбудимом режиме — совпадает для всех сосуществующих мод.

Теперь рассмотрим зависимости характеристик колебательной моды $n = 1$ от коэффициента диффузии d при фиксированных значениях параметра $\beta = 2$ (автоколебательный режим) и $\beta = 4$ (возбудимый режим). Как видно из рисунка 4, в автоколебательном режиме элементарной ячейки изменение коэффициента диффузии не оказывает влияния ни на период колебаний, ни на их фазовую скорость, в отличие от возбудимого режима, в котором при увеличении коэффициента диффузии фазовая скорость также растет, а период колебаний — уменьшается.

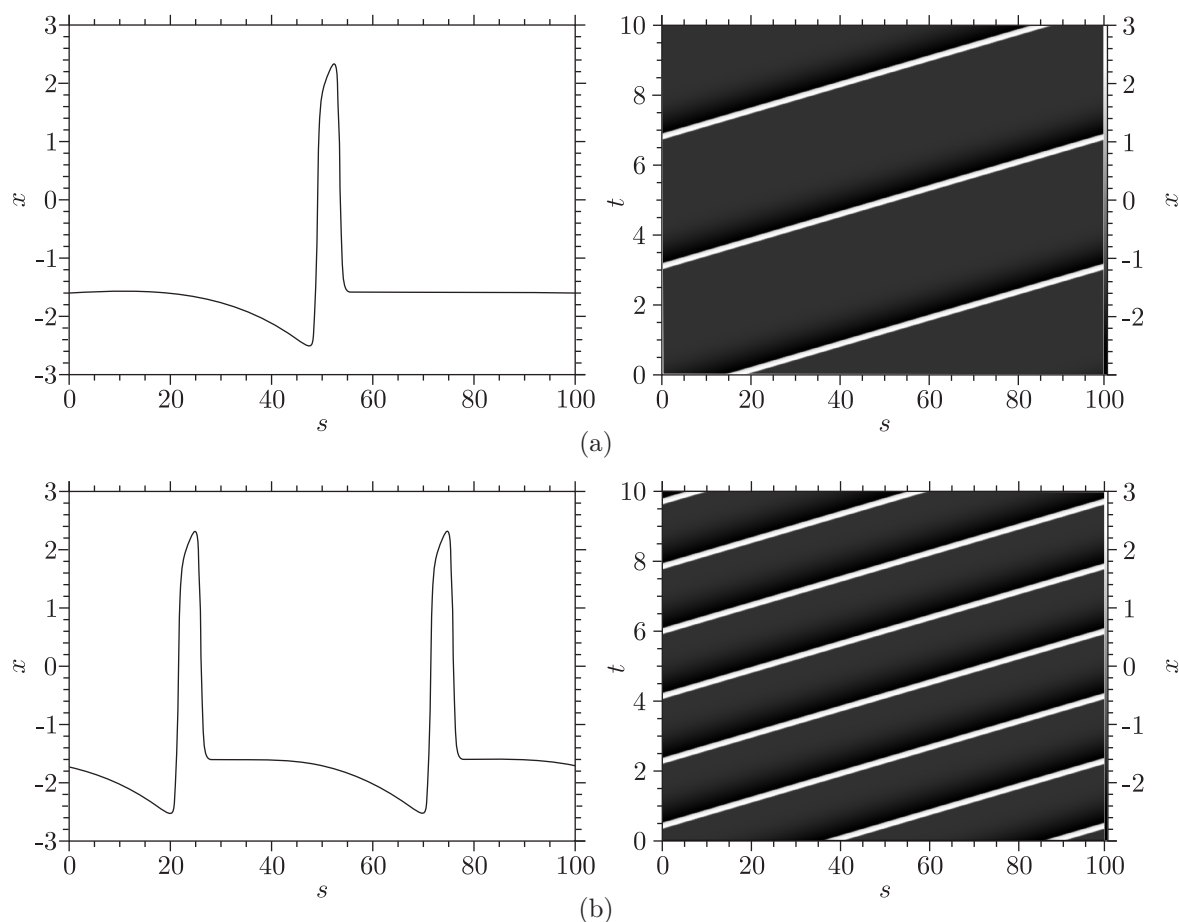


Рис. 2. Пространственные профили (слева) и пространственно-временные диаграммы (справа) мод $n = 1$ (a) и $n = 2$ (b) в возбуждимом режиме ячейки при $\beta = 4$.

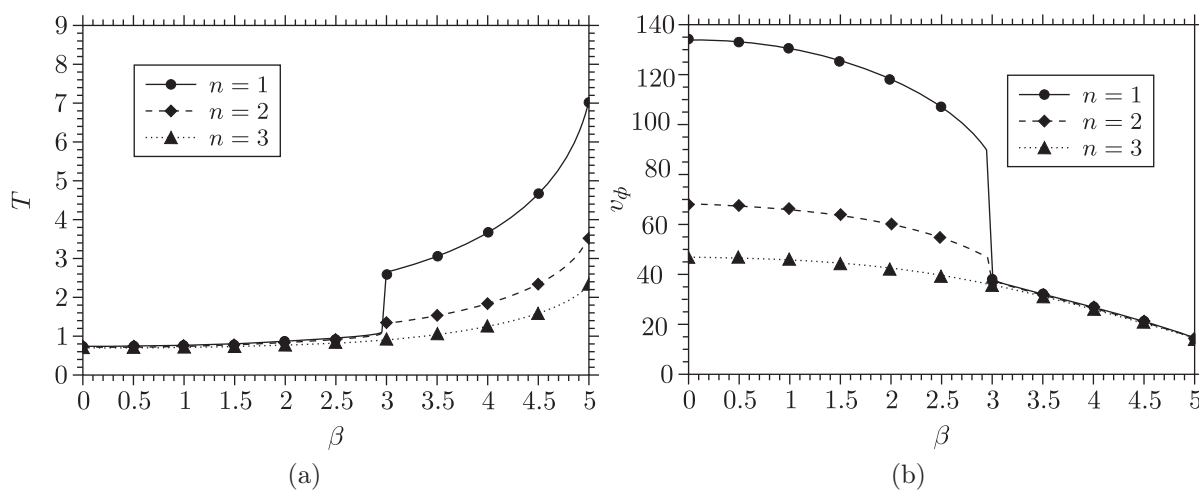


Рис. 3. Зависимости периода (a) и фазовой скорости (b) колебательных мод $n = 1, 2, 3$ от параметра β .

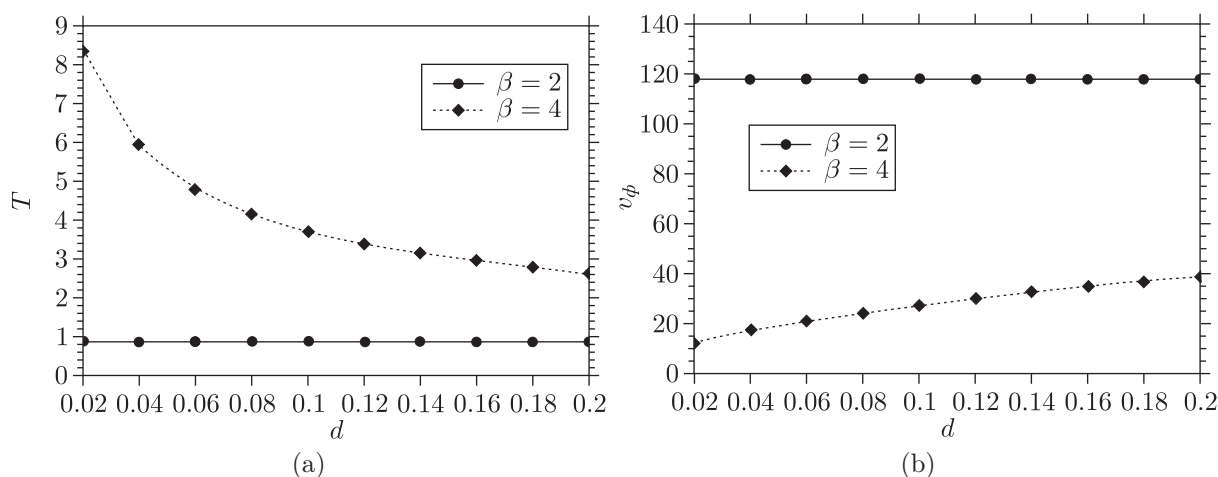


Рис. 4. Зависимости периода (а) и фазовой скорости (б) колебательной моды $n = 1$ от коэффициента диффузии d в различных режимах элементарной ячейки.

3. Влияние пространственно некоррелированного шума на характеристики колебаний среды в различных режимах элементарной ячейки

Рассмотрим влияние пространственно некоррелированного шума на поведение активной среды при фиксированном значении коэффициента диффузии $d = 0.1$ в автоколебательном ($\beta = 2$) и возбудимом ($\beta = 4$) режимах элементарной ячейки. Как видно из рисунка 5, в автоколебательном режиме средний период колебаний медленно монотонно уменьшается с ростом D , в отличие от возбудимого режима, в котором зависимость среднего периода колебаний от интенсивности шума является заметно более сложной.

Для активной среды в возбудимом режиме можно особо выделить значение интенсивности шума $D_{cr1} \approx 0.02$, которое является бифуркационным — при $D > D_{cr1}$ качественно меняется характер колебаний, наблюдается переход среды в «режим случайных возбуждений» (рис. 6). Возникают изломы волнового фронта, соответствующие локальным изменениям направления распространения волны (рис. 6b). С увеличением интенсивности шума происходит полное разрушение режима бегущей волны и колебания среды становятся статистически однородными. Также можно отметить, что, начиная со значения интенсивности шума $D_{cr2} \approx 0.07$ (рис. 5), зависимость $\langle T \rangle (D)$ при возбудимом режиме ячейки становится практически линейной, а угол наклона ее совпадает с углом наклона аналогичной зависимости при автоколебательном режиме ячейки. При этом характер колебаний при различных режимах элементарной ячейки оказывается статистически однородным, но несколько различным (рис. 7).

Заключение

Проведенные исследования выявили существенные различия незатухающих колебаний, наблюдающихся в автоколебательной и возбудимой средах при периодических граничных условиях. Эти различия касаются, прежде всего, зависимости характеристик колебаний от номера волновой моды и параметров среды, а также от влияния шумового воздействия. Так, в случае автоколебательной среды, период колебаний T слабо зависел от параметра β ,

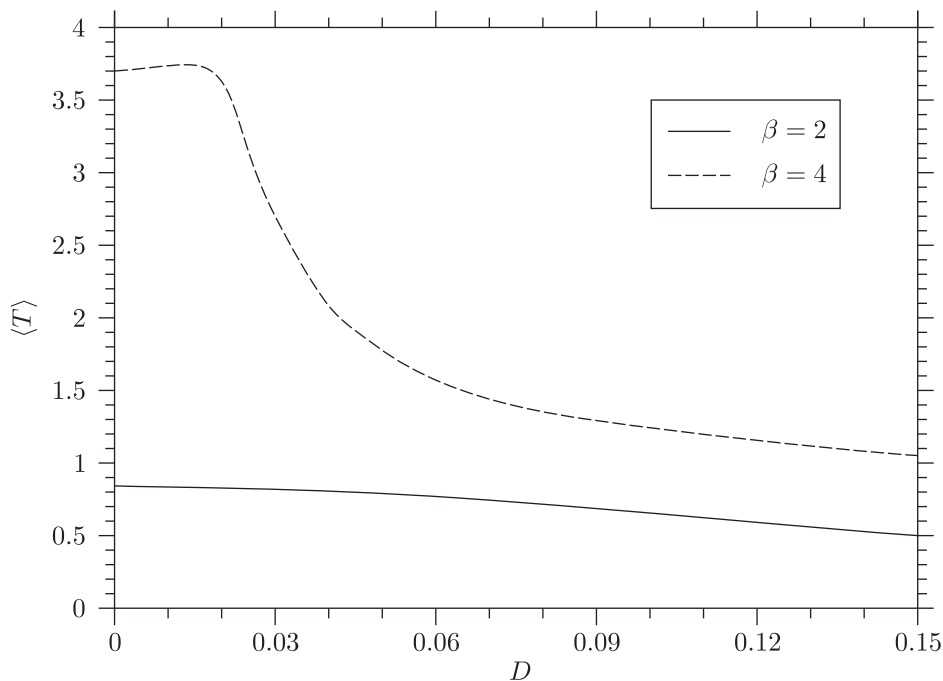


Рис. 5. Зависимость среднего периода колебаний моды $n = 1$ от интенсивности шума D в автоколебательном ($\beta = 2$) и возбудимом ($\beta = 4$) режимах элементарной ячейки.

управляющего поведением элемента среды, и практически не зависел от коэффициента диффузии d . В то же время, для возбудимой среды зависимость T от β и d была весьма существенной. Следует отметить также, что период колебаний в случае автоколебательной среды не зависит от номера волновой моды, а фазовая скорость для различных мод существенно различается. В возбудимой среде, напротив, фазовая скорость практически одинакова для всех мод, а периоды колебаний — различны.

Переход через критическое значение параметра $\beta_{cr} \approx 3$, соответствующее смене характера элемента среды, для большинства волновых мод сопровождается заметным изменением периода и фазовой скорости. Пространственно однородный режим при $\beta > \beta_{cr}$ вообще исчезает. Таким образом, в некотором смысле можно говорить о бифуркационном переходе в среде.

Результаты шумового воздействия на автоколебательную и возбудимую среды также сильно отличаются. Шум в обоих случаях приводит к переключениям на другие волновые моды, что для возбудимой среды ведет к резкому изменению среднего периода колебаний. Для автоколебательной среды зависимость среднего периода от интенсивности шума оказывается гораздо более плавной.

С точки зрения классического определения автоколебаний, данного А. А. Андроновым, незатухающие колебания в возбудимой среде с периодическими граничными условиями, также как и в автоколебательной среде, являются автоколебательными режимами. Однако, в силу перечисленных выше различий между ними, их имеет смысл различать как два вида автоколебаний, характерных для активных сред. Установленные различия могут быть использованы при определении характера элемента среды по результатам натурных экспериментов, что может быть существенно при построении математических моделей реальных сред.

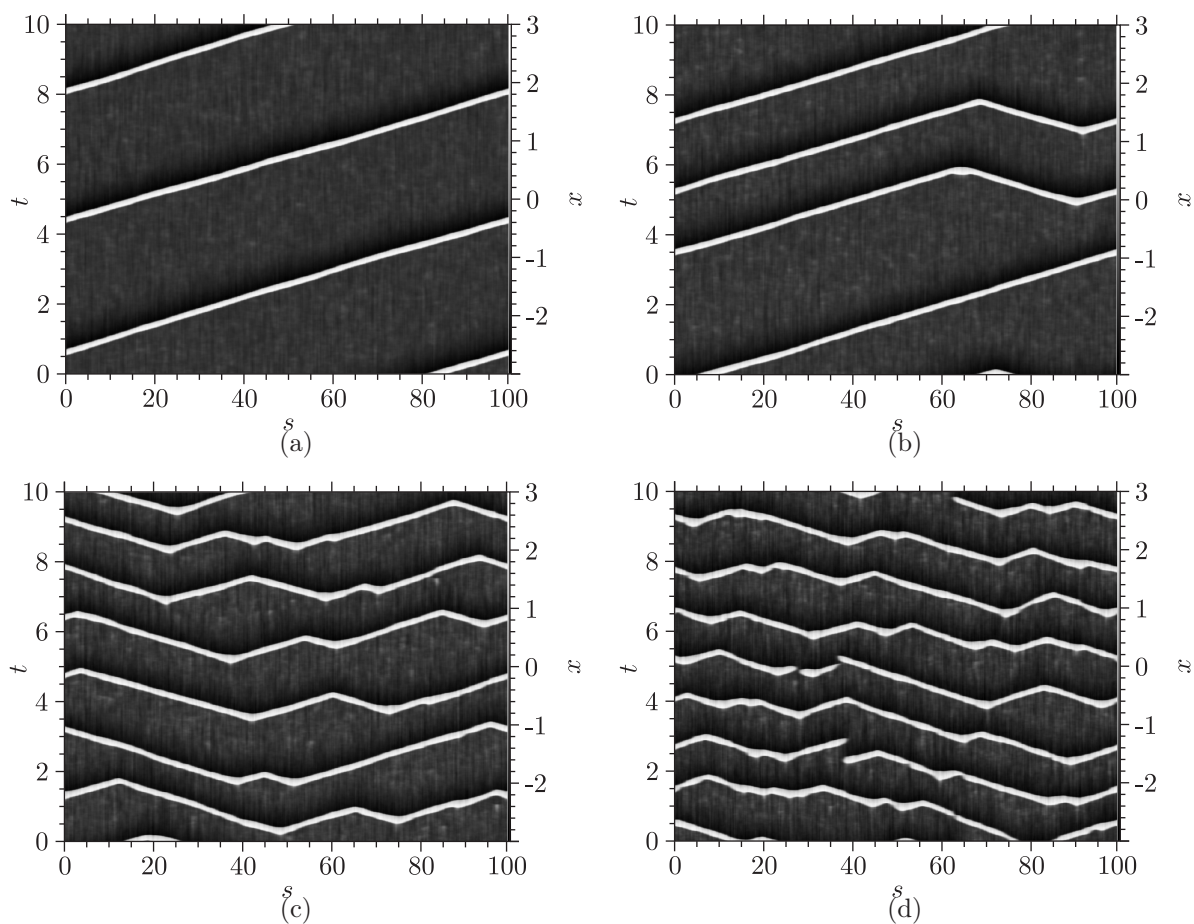


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы моды $n = 1$ в возбужденном режиме ячейки при $\beta = 4$ и различных интенсивностях шума ((a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.03$, (c) $D = 0.06$, (d) $D = 0.09$).

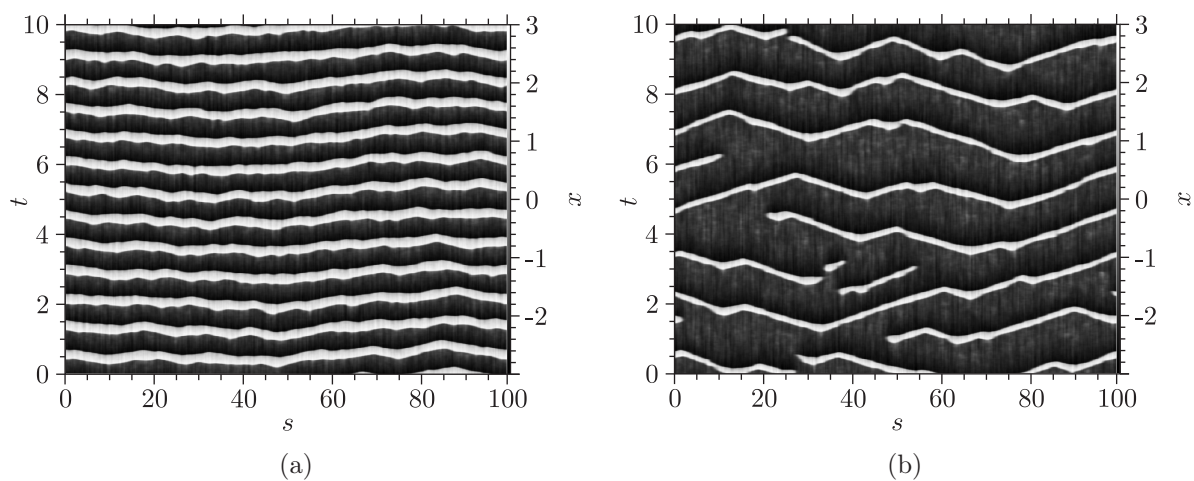


Рис. 7. Пространственно-временные диаграммы моды $n = 1$ в автоколебательном ($\beta = 2$ (a)) и возбужденном ($\beta = 4$ (b)) режимах ячейки при интенсивности шума $D = 0.1$.

Список литературы

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 918 с.
- [2] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
- [3] Winfree A. T. Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media // *Chaos*, 1991, vol. 1, no. 3. pp. 303–334.
- [4] Starmer C. F., Biktashev V. N., Romashko D. N., Stepanov M. R., Makarova O. N., Krinsky V. I. Vulnerability in an excitable medium: Analytical and numerical studies of initiating unidirectional propagation // *Biophys. J.*, 1993, vol. 65, no. 5, pp. 1775–1787.
- [5] Starobin J. M., Zilberter Y. I., Starmer C. F. Vulnerability in one-dimensional excitable media // *Phys. D*, 1994, vol. 70, pp. 321–341.
- [6] Alford J. G., Auchmuty G. Rotating wave solutions of the FitzHugh–Nagumo equations // *J. Math. Biol.*, 2006, vol. 53, no. 5, pp. 797–819.
- [7] Елькин Ю. Е. Автоволновые процессы // *Матем. биол. и биоинформ.*, 2006, т. 1, № 1–2, с. 27–40.
- [8] FitzHugh R. A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.*, 1961, vol. 1, pp. 445–466.
- [9] Huang X., Troy W. C., Yang Q., Ma H., Laing C. R., Schiff S. J., Wu J.-Y. Spiral waves in disinhibited mammalian neocortex // *J. Neurosci.*, 2004, vol. 24, pp. 9897–9902.
- [10] Ermentrout B., Pinto D. Neurophysiology and waves // *SIAM News*, 2007, vol. 40, no. 2.
- [11] Lancaster J. L., Hellen E. H., Leise E. M. Modeling excitable systems: Reentrant tachycardia // *Amer. J. Phys.*, 2010, vol. 78, no. 1, pp. 56–63.
- [12] Слепнев А. В., Вадивасова Т. Е., Листов А. С. Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 755–767.

Two kinds of auto-oscillations in active medium with periodical border conditions

Andrey V. Slepnev¹, Tatyana E. Vadivasova²

^{1,2}International Research Institute of Nonlinear Dynamics
Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky
Astrahanskaya st. 83, Saratov, 410026, Russia

¹a.v.slepnev@gmail.com, ²tanya@chaos.ssu.runnet.ru

The model of an active medium with periodical boundary conditions is studied. The elementary cell is chosen to be FitzHugh–Nagumo oscillator. According to the values of parameters the elementary cell is able to be either in self-sustained regime or in excitable one. In both cases there are sustained oscillations in each elementary cell of the medium, but the causes of its initiation are different. In case of the former each cell in itself is auto-oscillator, in case of the latter the oscillations appear because of feedback which is provided by the periodical boundary conditions. In both cases the phenomenon of multistability is observed. The comparative analysis of the regimes mentioned above is carried out. There are shown that the dependencies of oscillations characteristics from the system parameters in either cases significantly differ from one another. The bifurcational type of the transition from one cell regime to another is ascertained for some modes. The influence of spatial-uncorrelated noise on the active medium behavior is considered. The average period of oscillations versus noise intensity relation is obtained.

MSC 2010: 70Kxx, 39Axx

Keywords: active medium, FitzHugh–Nagumo system, spatial structures, multistability, noise influence

Received July 11, 2012, accepted September 12, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 497–505 (Russian)